Jakub Czekalski 1D

Jak w codziennym życiu posługujemy się matematyczną logiką?

Czasami matematyka wydaje nam się abstrakcyjna, na tyle abstrakcyjna, że posuwamy się do stwierdzeń iż w codziennym życiu jest zbędna. Jest to oczywiście fałsz, matematyki używamy w wielu dziedzinach naszego życia, nie bez powodu jest ona nazywana królową nauk. Jedną z bardziej praktycznych dziedzin matematyki jest logika, ale właściwie co możemy o logice właśnie powiedzieć, jak ją zdefiniować? Kiedy i jak ją wykorzystujemy? Czy znajomość matematycznych zasad kierujących logiką faktycznie może pomóc nam w życiu?

1.Podstawy logiki w matematyce

Logika w matematyce zwana jest także metamatematyką, wyodrębniła się jako osoba gałąź matematyki na przełomie XIX i XX wieku. Aby móc omówić wpływ tego właśnie działu królowej nauk na nasze życie chciałbym najpierw przybliżyć i omówić jego podstawy. Zacznijmy od tego czym jest zdanie logiczne (ang. statement). Zdanie logiczne to zdanie na, które możemy udzielić tylko jedną z dwóch odpowiedzi: „prawda"(ang. true) lub „fałsz" (ang. false), od razu dodam, że prawdę oznaczamy cyfrą 1, a fałsz cyfrą 0, a samo zdanie w logice często oznaczamy literą p lub q. Przechodząc do przykładów zdań logicznych:

- Matematyka nie ma żadnego zastosowania w życiu codziennym. - fałsz (0)
- All mammals live under water - false (0)
- Nie wszystkie kwiaty są koloru czerwonego - prawda (1)
- Not every rectangle is a square, but every square is a rectangle - true (1)

2.Działania na zdaniach logicznych (operatory logiczne)

Kiedy wiemy już czym jest zdanie logiczne możemy po krótce omówić czym są operatory logiczne (ang. Logical operators/logical connectives) wyróżniamy pięć podstawowych - jeden jednoargumentowy (dotyczący jednego zdania) - negacja (ang. negation) oraz cztery dwuargumentowe (dotyczące dwóch zdań logicznych) - koniunkcja (ang. conjunction), alternatywa (ang. disjunction), implikacja (ang. implication) oraz równoważność (ang. biconditional). Postaram się po krótce omówić na czym polega używanie każdego z tych 5 operatorów logicznych:

- negacja/negation - oznaczamy ją znakiem „¬" lub „~" przed zdaniem logicznym oraz czytamy jako „nieprawda, że" (ang. „it is false that"), np. Jeśli zdanie logiczne „All mammals live under water." oznaczymy literą p, to zdanie logiczne ~p będzie brzmiało „It is false that all mammals live under water." Negacja sprawia, że zdanie odwraca swoją wartość logiczną, czyli zdanie wcześniej prawdziwe staje się fałszywe, a zdanie wcześniej fałszywe staje się prawdziwe i tak wcześniej fałszywe zdanie - „All mammals live under water." Stało się prawdziwe - „It is false that all mammals live under water."
- koniunkcja/conjunction - oznaczamy ją znakiem „∧" między dwoma zdaniami logicznymi i czytamy jako „i" (ang. and). Jeśli zdanie logiczne „2 + 4 = 6" oznaczymy literą p, a zdanie logiczne „rectangle has four right angles" oznaczymy literą q (zdania, które łączymy operatorem logicznym nie muszą mieć ze sobą bezpośredniego związku, przynajmniej w samej logice matematycznej) to zdanie p∧q będzie brzmiało: „2 + 4 = 6 and rectangle has four right angles". Koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy kiedy oba zdania składowe są prawdziwe, oznacza to, że powyższy przykład jest prawdą, jednak, gdy jedno lub oba zdania koniunkcji będą fałszem wówczas cała koniunkcja jest fałszywa:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tablica prawdy (ang. Truth table) dla koniunkcji (układ tabelaryczny przedstawiający czy zdanie wynikowe będzie prawdziwe we wszystkich możliwych kombinacjach zdań p i q)

- Alternatywa/disjunction - oznaczamy ją znakiem „∨" między dwoma zdaniami logicznymi i czytamy jako „lub" (ang. or). Jeśli zdanie logiczne „not all animals living in water are fishes" oznaczymy literą p, a zdanie logiczne „area of triangle equals side of triangle squared" oznaczymy literą q to zdanie p∨q będzie brzmiało: „not all animals living in water are fishes or area of triangle equals side of triangle squared". Alternatywa jest fałszem tylko wtedy, gdy oba zdania składowe są fałszem, gdy jedno lub oba zdania alternatywy będzie prawdą wówczas alternatywa jest prawdziwa, dlatego przykładowe zdanie powyżej jest prawdziwe mimo, że zdanie q jest fałszem. Alternatywę możemy nazwać odwrotnością koniunkcji, co wywnioskować można patrząc na tablice prawdy dla alternatywy:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tablica prawdy dla alternatywy.

- Implikacja/implication - oznaczymy ją znakiem „→" między dwoma zdaniami logicznymi i czytamy jako „jeśli … to" (ang. „if … then") . Jeśli zdanie logiczne „Rectangle is parallelogram" oznaczymy literą q, a zdanie logiczne „√4 = 1" oznaczymy literą q to zdanie p→q będzie brzmiało „If rectangle is parallelogram then √4 = 1". Implikacja jest fałszem tylko w jednym przypadku - kiedy z prawdy wynika fałsz, we wszystkich innych przypadkach jest ona prawdziwa, oznacza to, że powyższe zdanie jest fałszem, gdyż ze zdania składowego, prawdziwego wynika zdanie składowe fałszywe.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tablica prawdy dla implikacji.

- Równoważność/biconditional - oznaczamy ją znakiem „↔" między dwoma zdaniami logicznymi i czytamy jako „wtedy i tylko wtedy, gdy" (ang. „If and only if", w skrócie „iff"). Jeśli zdanie logiczne „Area of the square whose side is the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides" oznaczymy literą q, a zdanie logiczne „There are 7.8 Billion people in the world" oznaczymy literą p to zdanie p↔q będzie brzmiało „Area of the square whose side is the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides if and only if (iff) there are 7.8 Billion people in the world”. Równoważność jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania składowe mają tą samą wartość logiczną (oba są fałszem lub oba są prawdą), oznacza to, że powyższe zdanie jest prawdziwe, gdyż oba zdania składowe są prawdą.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tablica prawdy dla równoważności

3.Słowo o tautologiach

Tautologia to złożone zdanie logiczne (zawierające operatory i zdania składowe), które w każdej kombinacji prawdziwości zdań p i q (ewentualnie kolejnych zdań składowych) jest prawdziwe. Przykładem tautologii jest na przykład zdanie: $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$ co możemy zbadać za pomocą tablicy prawdy

p q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	formuła
0 0	0	1	1	1	1	1
0 1	0	1	1	0	1	1
1 0	0	1	0	1	1	1
1 1	1	0	0	0	0	1

Końcowy wynik tablicy prawdy w każdym przypadku to prawda, więc zdanie jest tautologią.

4.Logika w życiu codziennym

Więc przechodząc do sedna sprawy. Kiedy już omówiliśmy podstawy logiki czas omówić jak możemy je wykorzystać w życiu codziennym.

Logika może przydać nam się w wielu życiowych sytuacjach np. W konstruowaniu naszych wypowiedzi, kiedy argumenty w dyskusji oprzemy na zdaniach prawdziwych logicznie, np. Implikacji: „Jeżeli w Norwegii obywatele mają darmowe uniwersytety oraz służbę zdrowia to według ankiet są najszczęśliwszym narodem w Europie”, unikniemy błędów logicznych czy niemerytorycznych argumentów. W podanej powyżej implikacji zarówno zdanie pierwsze, jak i drugie są prawdziwe, znaczy to, że cała implikacja jest prawdziwa, a samo zdanie jest logiczne i merytoryczne. Jednak kiedy jedno ze zdań oprzemy na domysłach, np. „Jeżeli Frans ma najmniejszą elektroujemność, to jest najbardziej aktywnym pierwiastkiem chemicznym”. Aktywność Fransu nie jest dokładnie zbadana, więc zdanie to może się okazać zarówno fałszywe, jak i prawdziwe, więc nie jest to zdanie merytoryczne ani logiczne. Należy jednak uważać, gdyż zdanie poprawne w logice matematycznej może być nie do końca poprawne w logice wypowiedzi, zdania w logice wypowiedzi muszą być ze sobą powiązane. Zdanie „Jeżeli 2 + 2 = 4, to w Irlandii pasie się około 4 miliony owiec” jest poprawne według logiki matematycznej, natomiast ciężko zobaczyć tu sens jeśli chodzi o logikę wypowiedzi (natomiast w drugą stronę - zdanie poprawne w logice wypowiedzi powinno być także poprawne w logice matematycznej)

Kolejnym sposobem na zastosowanie logiki w życiu codziennym jest analizowanie informacji logicznie - czyli tak zwane logiczne myślenie. Więc, jak dokładnie działa logiczne myślenie? Jeden z artykułów, który możemy znaleźć w internecie mów:

„Logiczne myślenie zaczyna się od faktu zwanego przesłanką, kończy zaś wnioskiem. Ważne jest jednak to, co nasz mózg robi pomiędzy nimi, na kolejnych etapach, z których każdy powinien być racjonalnie uzasadniany i prawdziwy, podobnie jak przesłanka.”

Ten sam artykuł podaje jako przykład takiej przesłanki i wniosku zdanie:

„wszystkie róże są kwiatami i wszystkie kwiaty są roślinami, więc wszystkie róże są roślinami.”

Spróbujmy takie zdanie przełożyć na język matematyki:

Przyjmijmy, że róże, kwiaty oraz rośliny to zbiory. Oznaczmy róże jako A, a kwiaty jako B, rośliny natomiast oznaczmy jako C. Więc wróćmy do naszego zdania -

- wszystkie róże są kwiatami czyli $A \subset B$ (zbiór A zawiera się w zbiorze B).
- wszystkie kwiaty są roślinami czyli $B \subset C$ (zbiór B zawiera się w zbiorze C).
- wszystkie róże są roślinami czyli $A \subset C$ (zbiór A zawiera się w zbiorze C).

Teraz zapiszmy całe zdanie jako zdanie logiczne: $(A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$

Rozpatrzmy zdanie pod względem logicznym: zdanie $A \subset B$ faktycznie jest prawdziwe, gdyż wszystkie róże są kwiatami, zdanie $B \subset C$ także jest prawdziwe, gdyż faktycznie wszystkie kwiaty są roślinami. To oznacza, że koniunkcja $(A \subset B \wedge B \subset C)$ jest prawdziwa, gdyż oba jej zdania składowe są prawdziwe. Zdanie $A \subset C$ jest prawdziwe, gdyż faktycznie wszystkie róże są roślinami, więc w implikacji

$(A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$ z prawdy wynika prawda, więc zdanie „wszystkie róże są kwiatami i wszystkie kwiaty są roślinami, więc wszystkie róże są roślinami.”

Jest logicznie prawdziwe.

Przeanalizujmy teraz inne zdanie, które także można nazwać logicznym myśleniem:

„wszystkie róże są kwiatami i wszystkie tulipany są kwiatami, więc tulipan jest różą.”

Zdanie może brzmieć logicznie jednak już na samym początku coś nam nie pasuje, jednak zapiszmy to w języku matematycznym:

Przyjmijmy, że zarówno tulipany, jak i róże i kwiaty to zbiory. Oznaczmy tulipany literą A, róże literą B, a kwiaty literą C.

- wszystkie róże są kwiatami czyli $B \subset C$
- wszystkie tulipany są kwiatami czyli $A \subset C$
- Tulipan jest różą czyli $A = B$

Teraz zapiszmy cało zdanie jako zdanie logiczne: $(B \subset C \wedge A \subset C) \rightarrow A = B$

Rozpatrzmy więc to zdanie pod względem logicznym: zdanie $B \subset C$ jest prawdziwe, gdyż faktycznie wszystkie róże są kwiatami, zdanie $A \subset C$ jest także prawdziwe, gdyż tulipany też są kwiatami. To oznacza, że koniunkcja $(B \subset C \wedge A \subset C)$ jest prawdziwa, gdyż oba jej zdania składowe są prawdziwe. Zdanie A=B jest jednak fałszem, gdyż tulipan nie jest różą. Oznacza to, że cała implikacja jest fałszem, gdyż z prawdy wynika fałsz oraz całe zdanie jest logicznie fałszem.

Na podstawie takiej właśnie analizy możemy wdrożyć logiczne myślenie do naszego odbioru informacji. Prawdą jest, że taka dogłębna analiza może wydawać się bardzo mozolna, a w przypadku długich i skomplikowanych zdań ciężka do przeprowadzenia, jednak jeśli zaczniemy przeprowadzać taką analizę dla podstawowych zdań spotykanych w życiu codziennym, nasz mózg powoli zaczynie automatycznie analizować także trudniejsze zdania pod względem logicznym i zaczniemy logicznie myśleć. Logiczne myślenie ma wiele zalet np:

- Zaczniemy lepiej radzić sobie z nauką, nie tylko przedmiotów ścisłych, gdzie logiczne myślenie to podstawa, ale także humanistycznych czy przyrodniczych;
- Zaczniemy unikać porażek i pretensji do siebie o błędne decyzje;
- Będzie nam łatwiej planować cele, nawet te odległe i osiągać je;
- Będzie nam łatwiej radzić sobie z wpływem emocji, które często utrudniają lub wręcz uniemożliwiają podejmowanie ważnych życiowych decyzji;
- Zaczniemy trafnie odróżniać przyczyny od skutków;

Oprócz zalet, które wypunktowałem powyżej, matematyczna - logiczna analiza informacji pozwala nam także pozyskiwać nowe informacje na podstawie, których będziemy mogli wysuwać kolejne wnioski itd.

Przykładem tego są teorie na temat ciał niebieskich, czarnych dziur i odległych galaktyk - opierają się one na dostrzeganiu trafnych analogii, przesłanek i wniosków, gdyż twierdzeń w tych tematach często nie jesteśmy w stanie przebadać doświadczalnie. Oczywiście analiza elementów rzeczywistości tak skomplikowanych, jak np. czarne dziury to dużo bardziej wymagające zadanie niż nasz trywialny przykład „róż, kwiatów i tulipanów" jednak taka skomplikowana analiza dalej jest możliwa oraz jest stosowana przez naukowców.

Logiczna analiza analogii i przesłanek jest także wykorzystywana w badaniu nowych pierwiastków chemicznych - tych, których udało się wytworzyć zaledwie pare atomów. Nie jesteśmy w stanie zbadać właściwości fizycznych, np. Seaborgu, którego udało się zsyntezować jedynie pare atomów, jesteśmy w stanie natomiast wysunąć pewne przypuszczenia na podstawie analogii, obliczeń komputerowych i prawa okresowości i tak właśnie wnioskując oficjalne źródła podają, że właściwości fizyczne Seaborgu są bardzo podobne do właściwości fizycznych Wolframu.

5. Podsumowanie

Logiczne myślenie to analizowanie rzeczywistości na podstawie zasad logiki matematycznej oraz na podstawie pewnych faktów, które już znamy. Myśleć logicznie oznacza umieć analizować fakty - tzw. Przesłanki i na podstawie tego wyciągać wnioski. W szkole oprócz podstaw logiki matematycznej nie ma w programie nauki logicznego myślenia - jednak jest to bardzo ważny element naszego codziennego życia. Dlatego właśnie mam nadzieję, że ta namiastka logiki matematycznej oraz podstawowe instrukcje, jak można ją wykorzystać w codziennym życiu przydadzą się wam.

Źródła:

- https://www.neurogra.pl/trening-mozgu/logika/dlaczego-warto-trenowac
- https://en.wikipedia.org/wiki/Logical_connective
- https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_logic